Afro-Asian Journal of Scientific Research (AAJSR)
المجلة الأفروآسيوية للبحث العلمي (AAJSR)
E-ISSN: 2959-6505
Volume 3, Issue 1, January - March 2025
Page No: 30-40
Website: https://aajsr.com/index.php/aajsr/index
SJIFactor 2024: 5.028 ISI 2024: 0.580 معامل التأثير العربي (AIF) 2024: 0.74

منظومات ستورم – لوفيل

سمية رجب رفيدة[1*]، زينب نوري بن سليم[1]
[1] قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا

Sturm Systems – Liouville

Sumaia Rajab Rafieda [1 *], Zaynab Nouri Bnsaleem [1]
[1] Mathematics, Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya

*Corresponding author rajabsoma@gmail.com *sumaia rajab rafieda*[*]

تاريخ الاستلام: 2024-09-23 تاريخ القبول: 2024-12-01 تاريخ النشر: 2025-01-01

الملخص
يهدف هذا البحث إلى دراسة منظومات ستورم – لوفيل التي تنشأ عند استخدام طريقة فصل المتغيرات في حل مسائل القيم الحدية. تتميز هذه المنظومات بوجود معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية، مصحوبة بشرطين حدّيين، مما يجعلها أداة رياضية فعالة ومهمة في معالجة العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. تُبرز الدراسة أهمية منظومات ستورم – لوفيل في تسهيل التعامل مع مسائل القيم الحدية الأكثر تعقيداً، والتي تتضمن شروطاً ابتدائية وحدية قد تكون معقدة للغاية. يتم التركيز على البنية النظرية لهذه المنظومات، حيث يتم توضيح الأساس الرياضي لها وأهميتها في إيجاد الحلول الدقيقة. كما تُظهر الدراسة كيف يمكن لهذه المنظومات أن توفر أدوات تحليلية قوية لحل مشاكل القيم الحدية التي تظهر في تطبيقات متنوعة مثل الفيزياء والهندسة. تتضمن النتائج استعراضاً للخصائص الأساسية لهذه المنظومات، وتحليلاً للعوامل المؤثرة في دقتها وكفاءتها عند تطبيقها في سياقات مختلفة. يسهم البحث في تسليط الضوء على الإمكانات النظرية والعملية لمنظومات ستورم – لوفيل، مما يعزز فهم دورها في تبسيط حل المشكلات الرياضية المعقدة.

الكلمات المفتاحية: منظومات ستورم – لوفيل، القيم الذاتية، المتجهات (الدوال) الذاتية.

Abstract
This research is studying Sturm – Liouville Systems Which appears when applying separating variables, for its importance in solving the most difficult initial boundary value problems.This research focuses on the study of Sturm–Liouville systems, which arise when applying the method of separation of variables to boundary value problems. These systems are characterized by a second-order linear homogeneous differential equation accompanied by two boundary conditions, making them an effective and important mathematical tool for addressing various physical and mathematical problems. The study highlights the significance of Sturm–Liouville systems in simplifying the solution of more complex boundary value problems, which often involve intricate initial and boundary conditions. It emphasizes the theoretical framework of these systems, explaining their mathematical foundation and their

importance in obtaining precise solutions. Additionally, the research demonstrates how these systems provide robust analytical tools for solving boundary value problems encountered in applications such as physics and engineering. The findings include an overview of the fundamental properties of Sturm–Liouville systems and an analysis of the factors influencing their accuracy and efficiency when applied in different contexts. This research contributes to a better understanding of the theoretical and practical capabilities of Sturm–Liouville systems, reinforcing their role in simplifying the resolution of complex mathematical problems.

Keywords: Sturm – Liouville Systems; Eigen Values; Eigen Functions.

المقدمة

عند تطبيق طريقة فصل المتغيرات لحل مسألة القيم الحدية الابتدائية تظهر إحدى المنظومتان [1-3]:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad 0 < X < L$$
$$X(0) = 0 \quad , \quad X(L) = 0 \qquad (1)$$
$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad 0 < X < L$$
$$X'(0) = 0 \quad , \quad X'(L) = 0 \qquad (2)$$

المنظومات (1) و (2) تسميان بمنظومة ستورم- لوفيل نسبة الي عالمي الرياضيات الفرنسيين جاك شارل فرانسوا ستروم وجوزيف ليوفيل [4-6]. في هذا الورقة سندرس منظومة ستورم ليوفيل لأهميتها في حل مسائل القيم الحدية الابتدائية.

1) منظومات ستورم – لوفيل

تكتب على الصورة

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy(\lambda,x)}{dx}\right) + \{\lambda p(x) - q(x)\}y(\lambda,x) = 0 \qquad a < x < b \qquad (3)$$

$$-L_1 y'(\lambda,a) + h_1 y(\lambda,a) = 0 \qquad (4)$$

$$L_2 y'(\lambda,b) + h_2 y(\lambda,b) = 0 \qquad (5)$$

h_2 , h_1 , L_2 , L_1 ثوابت حقيقية ومستقلة عند λ, عندما تكون الدوال p , q , r , r' حقيقية ومتصلة على الفترة $a \le x \le b$ و $p > 0$, $r > 0$ على الفترة $a \le x \le b$ تسمى منظومة ستورم – لوفيل منتظمة.

يوجد دائماً حل صفري $y(\lambda,x) = 0$ يحقق منظومة ستورم – لوفيل بغض النظر عن قيمة λ ولكن لقيم معينة لـ λ (تسمى القيم الذاتية) توجد حلول غير صفرية للمنظومة. حل منظومة ستورم – لوفيل يسمى المتجهات (الدوال) الذاتية ويرمز لها بالرمز $y_n(x) = y(\lambda_n, x)$

ويجب أن تحقق المتجهات الذاتية الشروط المعتادة لحلول المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية وخصوصاً $y_n'(x)$, $y_n(x)$ متصلتان على $a \le x \le b$

نظرية (1)

كل القيم الذاتية لمنظومة ستورم لوفيل حقيقية والمتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $p(x)$.

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx = 0$$

نتيجة (1)

نتائج النظرية (1) تكون صحيحة

1. إذا كان $r(a)=0$ فإن الشرط الحدي (4) غير ضروري
2. إذا كان $r(b)=0$ فإن الشرط الحدي (5) غير ضروري
3. $r(a)=r(b)$ إذا استبدل الشرطان الحديان (4) و (5) بالشرطين الدوريين، على التوالي $y'(a)=y'(b), y(a)=y(b)$

منظومة ستورم لوفيل تكون شاذة إذا فقد أحد الشرطين أو كلاهما، وتكون دورية إذا كان $r(a)=r(b)$ و $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$

بالتالي فإن النظرية (1) ونتيجتها تنص على أن الدوال الذاتية لمنظومة ستورم لوفيل المنتظمة والدورية تكون دائماً متعامدة [7-10]، والدوال الداتية أيضاً تكون متعامدة إذا كانت المنظومة شاذة ويشترط $r(a)=0$ أو $r(b)=0$ أو $r(a)=r(b)=0$

إذا كان $(\lambda_n\ ,\ y_n(x))$ ثنائي ذاتي فإن $(\lambda_n\ ,\ cy_n(x))$ يكون ثنائي ذاتي لإي ثابت $c\neq 0$ أي أن الدوال الذاتية غير وحيدة، فإذا كان $y_n(x)$ دالة ذاتية مناظرة للقيمة الذاتية λ_n فإن $cy_n(x)$ يكون دالة ذاتية مناظرة لـ λ_n. في منظومة ستورم لوفيل المنتظمة يحدد واحد من الدوال الذاتية مناظرة لقيمة ذاتية وتنسب كل الدوال الذاتية الأخرى إلية [11-13]. الدالة الذاتية التي تحدد أو تُختار يكون معيارها 1 أي:

$$\|y_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b p(x)\big(y_n(x)\big)^2\, dx} = 1$$

والمتجهات الذاتية المعيارية يتم ايجادها بقسمة المتجهات الذاتية على طولها أو معيارها.

مثلاً

الدوال الذاتية للمنظومة (1) هي $y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$ مناظرة للقيمة الذاتية

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

كذلك $c\sin\frac{cn\pi x}{L}$ لأي ثابت $c\neq 0$ الدالة الذاتية المعيارية تكون

$$\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\|}$$

$$\left\| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\|^2 = \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$$

لذلك مع كل قيمة ذاتية $\lambda_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ لمنظومة ستورم لوفيل (1) توجد دالة ذاتية معيارية كما في الصورة التالية.

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

وبالمثل: -

الدوال الذاتية المعيارية لمنظومة ستورم لوفيل (2).

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad \lambda_0^2 = 0 \text{ مناظرة لـ}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{n\pi x}{L} \quad \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ مناظرة للقيمة الذاتية } ; n > 0$$

بصورة عامة

إذا كانت $y_n(x)$ دالة ذاتية لمنظومة ستورم لوفيل (3) فإنه سيتم استبدال كل دالة ذاتية بالدالة المعيارية:

$$\frac{1}{N} y_n(x) \qquad (6) \; N = \|y_n(x)\| \text{ حيث}$$

مثال

ناقش منظومة ستورم لوفيل

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

الحل

جذر المعادلة المميزة $m^2 + m + \lambda = 0$ هما $m = -1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}$

- ❖ الحالة الأولى: -
- ❖ عندما $\lambda < \dfrac{1}{4}$ الجذور في هذه الحالة حقيقية هما $\omega_2 = -1 - \sqrt{1-4\lambda}$, $\omega_1 = -1 + \sqrt{1-4\lambda}$

والحل العام يكون $y(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$. وبتطبيق الشروط الحدية $y(0) = y(1) = 0$ ينتج

$$0 = Ae^{\omega_1} + Be^{\omega_2} \quad A + B = 0 \quad ,$$

$$A = B = 0 \text{ ومنها}$$

إذا يوجد الحل الصفري فقط

❖ الحالة الثانية: -

عندما $\lambda = \frac{1}{4}$ الجذران في هذه الحالة متساويان والحل العام يكون $y(x) = (A + Bx)e^{\frac{-x}{2}}$

وبتطبيق الشروط الحدية ينتج $A = B = 0$

إذا يوجد الحل الصفري فقط

❖ الحالة الثالثة: -

عندما $\lambda > \frac{1}{4}$ الجذران في هذه الحالة $m = -\frac{1}{2} \pm i\omega$ حيث $\omega = \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}$ والحل العام يكون

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$$

وبتطبيق الشروط الحدية ينتج:

$$A = 0 \quad , \quad 0 = e^{\frac{-1}{2}}(A\cos\omega + B\sin\omega)$$

ومنها $\sin\omega = 0$

$$n \in I \qquad \omega = n\pi$$

بالتالي $n\pi = \frac{\sqrt{4\lambda n - 1}}{2}$

منها القيم الذاتية $\lambda_n = \frac{1}{4} + n^2\pi^2$

والدوال الذاتية $y_n(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin n\pi x$

ولجعل هذه الدوال معيارية يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الصورة التالية:

$$0 = e^x \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} + \lambda e^x y$$

أي $\frac{d}{dx}\left(e^x \frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^x y = 0$

وهي منظومة ستورم لوفيل (3) حيث أن دالة الوزن هي e^x

الآن يمكن حساب

$$\left\| e^{\frac{-x}{2}} \sin n\pi x \right\| = \sqrt{\int_0^1 e^x \left(e^{\frac{-x}{2}} \sin n\pi x\right)^2 dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذا الدوال الذاتية المعيارية تكون $y_n(x) = \sqrt{2} e^{\frac{-x}{2}} \sin n\pi x$

2) مفكوك الدوال الذاتية Eigen Function Expansions

متسلسلة فورييه لدالة الجيب للدالة $f(x)$ الناعمة مقطعياً على الفترة $0 \le x \le L$ تكتب على الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

(7)

حيث $$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

هنا نعتبر عوامل متسلسلة فورييه b_n مركبات الدالة $f(x)$ بالنسبة للدوال الاساسية $\sin \frac{n\pi x}{L}$ وهي الدالة الذاتية لمنظومة ستورم لوفيل (1) وسيتم استبدال الدوال الذاتية المعيارية $\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ المعادلة (7) يمكن التعبير عنها بدلالة الدوال الذاتية المعيارية كالآتي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(8)

حيث $$c_n = \int_0^L f(x) \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

العوامل C_n تكون مركبات $f(x)$ بالنسبة للدوال $\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ المعيارية المتعامدة الدالة $f(x)$ نفسها يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه لدالة جيب التمام بدلالة الدوال الذاتية المعيارية لمنظومة ستورم لوفيل (2) كما يلي:

$$f(x)=\frac{c_0}{\sqrt{L}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(9)

حيث
$$c_0=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L f(x)dx$$

$$c_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

الآن نحاول ايجاد العوامل C_n

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x) \qquad a\le x\le b \qquad (10)$$

حيث $y_n(x)$ الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة لمنظومة ستورم لوفيل (3).

إذا ضربت المعادلة (10) بـ $p(x)y_m(x)$ وبالتكامل حد بحد على الفترة $[a,b]$

$$\int_a^b P(x)f(x)y_m(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_a^b p(x)y_n(x)y_m(x)dx$$

وبسبب تعامد الدوال الذاتية الحد m فقط في المتسلسلة لا يساوي صفر أي أن:

$$\int_a^b P(x)f(x)y_m(x)dx=C_m \qquad (11)$$

الآن إذا تم حساب C_m كما في (11) هل المتسلسلة (10) متقاربة؟ هذا السؤال سيتم الاجابة عليه من خلال النظرية التالية:

نظرية (2)

إذا كانت $p,q,r,r',(p\,r)''$ دوال حقيقية متصلة في x على الفترة $a\le x\le b$ وإذا كانت $p>0$ و $r>0$ على الفترة $a\le x\le b$ وإذا كانت L_1,L_2,h_1,h_2 ثوابت حقيقية مستقلة عن λ فإن منظومة ستورم لوفيل (3) يكون لها دوال ذاتية $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$ كلها حقيقية وليس أكثر من عدد محدود يكون سالب و $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ والدوال الذاتية المعيارية المتعامدة المناظرة $y_n(x)$ و مشتقاتها $y_n'(x)$ متصلة و $\|y_n(x)\|$, $\left\|\lambda^{\frac{-1}{2}}y_n'(x)\right\|$ محدودة بصورة منتظمة بالنسبة لـ n,x

إذا كانت $f(x)$ ناعمة مقطعياً على $a\le x\le b$ فإن لأي x في $a<x<b$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n y_n \qquad (12)$$

حيث $$C_n=\int_a^b p(x)y_n(x)dx$$

المتسلسلة (12) تسمى متسلسلة فوريبه العامة للدالة $f(x)$ بالنسبة للدوال الذاتية $y_n(x)$, C_n تسمى عوامل فوريبه العامة وهي مركبات $f(x)$ بالنسبة للدوال الذاتية الأساسية المعيارية – المتعامدة – $\{y_n(x)\}$.

نتيجة

كل القيم الذاتية لمنظومة ستورم – لوفيل غير سالبة علاوة على ذلك الصفر يكون قيمة ذاتية لمنظومة ستورم – لوفيل عندما $q(x)=0$, $h_1=h_2=0$

مثال

أوجد مفكوك الدالة $f(x)=L-x$ بدلالة الدوال الذاتية المعيارية لمنظومة ستورم لوفيل

$$X''+\lambda^2 X=0 \qquad 0<x<L$$
$$X(0)=X'(L)=0$$

الحل

القيم الذاتية لهذه المنظومة تكون $\lambda_n=\frac{2n-1}{2L}\pi x$

والدالة الذاتية $y_n(x)=\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x$

$$\|y_n(x)\|=\sqrt{\int_0^L\left[\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x\right]^2dx}=\sqrt{\frac{L}{2}}$$

لذا فإن الدوال الذاتية المعيارية هي:

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x$$

ومتسلسلة فوريبه العامة للدالة $f(x)=L-x$ بدلالة هذه الدوال الذاتية

$$L-x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n X_n(x)$$

حيث

$$C_n=\int_0^L(L-x)\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)xdx$$

$$=-\sqrt{\frac{L}{2}}\left(\frac{2L}{(2n-1)\pi}\right)\int_0^L(L-x)d\cos\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi xdx$$

$$= \frac{2\sqrt{2}L^{3/2}}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2n-1} + \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}\right)$$

بالتالي:

$$L - x = \frac{2\sqrt{2}L^{3/2}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n-1} + \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}\right)\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x$$

النظرية (2) تضمن تقارب المتسلسلة على الفترة $0 < x < L$

المتسلسلة لا تتقارب إلى $L - x$ عندما $X = 0$ ولكنها متقاربة إلى $L - x$ إلى $L = x$

مثال

أوجد مفكوك الدالة $f(x) = 2x - 1$ على الفترة $[0, 4]$ بدلالة الدوال الذاتية المعيارية المتعامدة لمنظومة ستورم لوفيل

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad X'(0) = 0 \quad , \quad X(4) = 0$$

الحل

حل المعادلة التفاضلية يكون

$$X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

بتطبيق الشروط الحدية ينتج

$$b = 0 \qquad , \qquad a\cos\lambda 4 = 0$$

ومنها

$$4\lambda = \frac{(2n-1)}{2}\pi$$

أي أن

$$\lambda = \frac{2n-1}{8}\pi$$

$$N = \sqrt{\int_0^4 \cos^2\frac{(2n-1)}{8}\pi x\,dx} = 2$$

إذا الدوال الذاتية المعيارية تكون

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2n-1}{8}\right)\pi x$$

مفكوك الدالة $f(x) = 2x - 1$ يكتب على الصورة:

$$2x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

حيث أن

$$C_n = \int_0^4 (2x-1)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2n-1}{8}\right)x\pi dx$$

$$C_n = \frac{-8}{\sqrt{2}(2n-1)\pi}\left(\frac{16}{(2n-1)\pi} + 7(-1)^n\right)$$

بالتالي

$$2x-1 = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{16}{(2n-1)\pi} + 7(-1)^n\right)\cos\left(\frac{2n-1}{8}\right)\pi x$$

حيث $0 < x < 4$

3) منظومة ستورم لوفيل الدورية

القيم الذاتية لمنظومة ستورم لوفيل الدورية

$$Y'' + \lambda Y = 0 \qquad\qquad -L < x < L$$
$$Y(-L) = Y(L) \quad , \quad Y'(-L) = Y'(L)$$

هي

$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ حيث $(n = 0,1,2,\ldots)$ والدوال الذاتية المناظرة لها

$$\lambda_n \leftrightarrow 1 \quad ; \quad \lambda_n \leftrightarrow \sin\frac{n\pi x}{L} \quad , \quad \cos\frac{n\pi x}{L} \quad (n > 0)$$

والدوال الذاتية المعيارية

$$\lambda_0 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2L}}$$

$$\lambda_n \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi x}{L} \quad , \quad (n > 0)$$

بالتالي

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{\sqrt{-L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0 = \int_{-L}^{L} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)dx$$

$$a_n = \int_{-L}^{L} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \int_{-L}^{L} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

الخاتمة

في ختام هذا البحث، تم التركيز على دراسة منظومات ستورم – ليوفيل التي تمثل واحدة من الركائز الأساسية في تحليل وحل المعادلات التفاضلية. تناول البحث المفاهيم النظرية الأساسية لهذه المنظومات، حيث تم تقديم شرح تفصيلي للبنية الرياضية لهذه الأنظمة، بما في ذلك تعريفاتها الأساسية وشروطها الحدّية. تم التطرق إلى الخصائص الرئيسية لمنظومات ستورم – ليوفيل، لا سيما فيما يتعلق بـ القيم الذاتية والدوال الذاتية. وقد لوحظ من خلال الدراسة أن هذه الخصائص تمثل مفتاحاً لفهم السلوك

الرياضي للنظم التي توصف بواسطة هذه المنظومات. تُظهر القيم الذاتية ارتباطاً وثيقاً بمعدل الترددات أو الأوضاع المستقرة للنظام، في حين أن الدوال الذاتية تسهم في وصف الحلول الدقيقة للنظم التفاضلية. كما أثبت البحث أهمية منظومات ستورم – ليوفيل في مختلف التطبيقات الرياضية والفيزيائية. فهي ليست مجرد أداة لحل المعادلات التفاضلية فحسب، بل تعتبر أيضاً إطاراً نظرياً شاملاً يمكن استخدامه في مجالات متنوعة، مثل تحليل الأنظمة الديناميكية، دراسة الظواهر الفيزيائية، والنمذجة الرياضية للعمليات الطبيعية. من خلال هذه الدراسة، تم التأكيد على دور منظومات ستورم – ليوفيل كأحد الأعمدة الأساسية في الرياضيات التطبيقية، إذ توفر أدوات تحليلية فعالة تسهم في تبسيط وفهم المشكلات الرياضية المعقدة. وتوصي الدراسة بضرورة إجراء المزيد من الأبحاث المتقدمة لتوسيع نطاق التطبيقات العملية لهذه المنظومات، بالإضافة إلى تعزيز فهمها النظري من خلال ربطها بالمجالات الأخرى كالتحليل الطيفي والنمذجة الحاسوبية.

المراجع

[1] E. C. de Oliveira and J. E. Maiorino, “Sturm–Liouville systems,” in *Problem Books in Mathematics*, Cham: Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 169–195.

[2] I. Cação, M. I. Falcão, H. R. Malonek, and G. Tomaz, “A Sturm-Liouville equation on the crossroads of continuous and discrete hypercomplex analysis,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 47, no. 10, pp. 7962–7987, 2024.

[3] P. Ngo and K. Lan, “Minimum principles for Sturm–Liouville inequalities and applications,” *Mathematics*, vol. 12, no. 13, p. 2088, 2024.

[4] S. Shokooh and A. A. Shamlou, “Existence of weak solutions for a Sturm–Liouville type system using critical points theorems,” *J. Funct. Spaces*, vol. 2024, no. 1, 2024.

[5] D. R. Samudra and C. R. Indrati, “Fundamental solution of Sturm-Liouville equation,” in *AIP Conference Proceedings*, 2024, vol. 3029, p. 040006.

[6] P. B. Natalia, “Uniform stability of the inverse problem for the non-self-adjoint Sturm-Liouville operator,” *arXiv [math.SP]*, 2024.

[7] H. Farzana, S. Kumar Bhowmik, and M. A. Alim, “Bernstein collocation technique for a class of Sturm-Liouville problems,” *Heliyon*, vol. 10, no. 7, p. e28888, 2024.

[8] C.-S. Liu, C.-W. Chang, and C.-L. Kuo, “Numerical analysis for Sturm–Liouville problems with nonlocal generalized boundary conditions,” *Mathematics*, vol. 12, no. 8, p. 1265, 2024.

[9] F. Dalmao and J. R. León, “On the number of roots of Sturm-Liouville random sums,” *Electron. Commun. Probab.*, vol. 29, no. none, 2024.

[10] K. Al-Khaled and A. Hazaimeh, “Comparison methods for solving non-linear Sturm–Liouville eigenvalues problems,” *Symmetry (Basel)*, vol. 12, no. 7, p. 1179, 2020.

[11] U. Perera and C. Böckmann, “Solutions of Sturm-Liouville problems,” *Mathematics*, vol. 8, no. 11, p. 2074, 2020.

[12] R. Rabenstein and M. Schäfer, “Sturm-Liouville transformation,” in *Multidimensional Signals and Systems*, Cham: Springer International Publishing, 2023, pp. 347–400.

[13] V. Kravchenko, “Spectrum completion and inverse Sturm–Liouville problems,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 46, no. 5, pp. 5821–5835, 2023.