Afro-Asian Journal of Scientific Research (AAJSR)
المجلة الأفروآسيوية للبحث العلمي
E-ISSN: 2959-6505
Volume 3, Issue 4, 2025
Page No: 244-252
Website: https://aajsr.com/index.php/aajsr/index
SJIFactor 2024: 5.028 ISI 2025: 0.915 معامل التأثير العربي (AIF) 2025: 0.76

Numerical Solution of Volterra's Integral Equation Using Runge-Kutta Methods (Second Order–Fourth Order)

Hamida Ali SHafter[1*], Sumaia Rajab Rafieda[2]
[1,2]Faculty of Education, Misurata University, Misurata Libya

الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية باستخدام طرق رونج – كوتا (الرتبة الثانية – الرتبة الرابعة)

حميدة علي شفتر[1*]، سمية رجب رفيدة[2]
[1،2]كلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا

*Corresponding author: h.shafter@edu.misuratau.edu.ly

Received: October 13, 2025	Accepted: December 21, 2025	Published: December 30, 2025

Abstract:
This scientific paper addresses the study of numerical solutions for Volterra integral equations using second-order and fourth-order Runge-Kutta methods. These equations appear in various fields such as physics, engineering, chemistry, and medical sciences, where it is difficult to obtain analytical and accurate solutions. The Volterra integral equation is transformed into a first-order or second-order differential equation depending on the nature of the equation, after which the Runge-Kutta method is applied. The results show that the use of the Runge-Kutta method provides accurate numerical solutions for Volterra integral equations. Numerical solutions using Runge-Kutta of different orders were compared, and it was clear that the numerical solution using the fourth-order Runge-Kutta method is more accurate than that using the second-order Runge-Kutta method, with results presented using MATLAB software. The study demonstrates that the Runge-Kutta method is an effective tool for solving Volterra integral equations.

Keywords: Volterra Integral Equations, Runge-Kutta second order method, Runge-Kutta classical method.

الملخص:
تتناول هذه الورقة العلمية دراسة الحلول العددية لمعادلات فولترا التكاملية باستخدام طرق رونج كوتا من الرتبة الثانية ومن الرتبة الرابعة، وتظهر هذه المعادلات في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة والكيمياء والعلوم الطبية حيث انه من الصعب الحصول على حلول تحليلية ودقيقة لها. يتم تحويل معادلة فولترا التكاملية الي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي او من الرتبة الثانية علي حسب طبيعة المعادلة تم يتم تطبيق طريقة رونج كوتا عليها. تظهر النتائج أن استخدام طريقة رونج كوتا يوفر حلولًا عددية دقيقة لمعادلات فولترا التكاملية. تم مقارنة الحلول العددية باستخدام رونج كوتا من رتب مختلفة وكان واضحا أن الحل العددي باستخدام رونج كوتا من الرتبة الرابعة أدق من رونج كوتا من الرتبة الثانية وتم عرض النتائج باستخدام برنامج الماثلاب. تُظهر الدراسة أن طريقة رونج كوتا هي أداة فعالة لحل معادلات فولترا التكاملية.

الكلمات المفتاحية: معادلة فوليترا التكاملية، طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية، طريقة رونج كوتا الكلاسيكية.

المقدمة:

تعد معادلات فولتيرا التكاملية واحدة من النماذج الرياضية المهمة التي تظهر في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية. تتميز هذه المعادلات بكونها تحتوي على حدود تكامل على هيئة متغيرات. ونظراً لتعقيد معادلات فولتيرا وصعوبة الحصول على حلول تحليلية دقيقة لها في العديد من التطبيقات لذلك أصبحت الطرق العددية أداة أساسية وفعالة لحلها. تعتمد الحلول العددية لمعادلات فولتيرا التكاملية على تقنيات متنوعة من أبرزها طرق التكامل العددي مثل قاعدة سمبسون وطريقة شبه المنحرف، إضافة إلى الطرق التكرارية مثل طريقة رونج – كوتا، تهدف هذه الأساليب إلى تقريب الحلول بدقة وكفاءة. وفي هذا الورقة سيتم تسليط الضوء على كيفية تطبيق طريقة رونج – كوتا ذات الرتبة الثانية (أويلر المعدلة) وطريقة رونج – كوتا ذات الرتبة الرابعة (الكلاسيكية) في حل معادلة فولتيرا التكاملية مع مقارنة فعالية دقة كل طريقة. لحل معادلة فولتيرا التكاملية باستخدام طريقة رونج – كوتا يتم بإعادة صياغة المعادلة على شكل معادلة تفاضلية لذا سوف يتم التطرق إلى كيفية تحويل معادلة فولتيرا التكاملية إلى معادلة تفاضلية.

المعادلة التكاملية *Integral Equation*:

هي المعادلة التي تظهر فيها الدالة المجهولة $u(x)$ داخل وخارج علامة التكامل، وتكون الصورة العامة للمعادلة التكاملية:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt$$

حيث أن:

1. $f(x)$ دالة معلومة.
2. $k(x,t)$ دالة معلومة بدلالة متغيرين t, x وتسمى نواة المعادلة التكاملية.
3. $\beta(\mathrm{x}), \alpha(\mathrm{x})$ حدود التكامل وتكون إما ثوابت أو متغيرات او كلاهما.
4. $u(x)$ دالة مجهولة تظهر داخل علامة التكامل، وقد تظهر خارج علامة التكامل أيضا.
5. λ عدد حقيقي.

معادلة فولتيرا التكاملية *Volterra Integral Equations*:

هي المعادلة التي تكون فيها حدود التكامل متغيرات أو على الأقل أحداهما متغير، فمثلا تكون حدود التكامل من a إلى x والصيغة العامة لمعادلة فولتيرا التكاملية تكون كما يلي:

$$\emptyset(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x,t)u(t)dt \qquad (1)$$

وتنقسم إلى نوعين، عندما نعوض $\emptyset(x) = 0$ في المعادلة (1) نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول:

$$f(x) = \lambda \int_{a}^{x} k(x,t)u(t)dt$$

أما عندما نعوض $\emptyset(x) = 1$ في المعادلة (1) نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$u(x) = f(x) + \lambda + \int_{a}^{x} k(x,t)u(t)dt$$

طرق رونج – كوتا *Runge – Kutta Methods*:

تعد من أكثر الطرق استخداماً وأكثرها شيوعاً لحل المعادلات التفاضلية، حيث توفر حلولاً عالية الدقة للمعادلات التفاضلية دون الحاجة إلى حساب المشتقات العليا كما في طريقة تايلور.

والصورة العامة لطريقة رونج – كوتا من المرحلة s للمعادلة:

$$y' = f(x,y) \qquad ; \qquad y(x_0) = y_0$$

وتعرف كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} & y_{n+1} = y_n + hb_ik_i \\ & k_i = f\left(x_n + c_ih, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right) \\ & i = 1,2,3,4,\dots,s \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

مع تحقق شرط الصف:

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \qquad ; \qquad i = 1,2,\dots,s$$

توجد صيغ مختلفة لطريقة رونج – كوتا بالاعتماد على الرتبة، حيث توجد الصيغة ذات الرتبة الثانية أو الثالثة أو الرابعة أو الخامسة أو...، سيتم التركيز على طريقة رونج – كوتا من الرتبتين الثانية والرابعة نظراً لدقتهما في إيجاد الحلول، مع التركيز على المقارنة بينهما من حيث الأداء والدقة والكفاءة، ومدى تفوق إحدى الطريقتين على الأخرى في تقليل الخطأ وتحقيق تقارب أسرع للحل الفعلي.

طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية:

تعرف طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية كالآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1 h)$$

طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة(الكلاسيكية):

وتعرف طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة كالآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

وتسمى بطريقة رونج – كوتا الكلاسيكية أو التقليدية.

تحويل معادلة فولتيرا التكاملية إلى مسألة قيمة ابتدائية:

لتحويل معادلات فولتيرا التكاملية إلى مسألة قيمة ابتدائية مكافئة سوف نقوم بتفاضل طرفي المعادلة التكاملية إلى أن يتم التخلص من علامة التكامل وسوف نحتاج إلى تطبيق قاعدة ليبنيز التي يمكن تعريفها كما يلي:

قاعدة ليبنيز *Leibniz Rule*:

قاعدة ليبنيز تعطى كالتالي:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G\big(x,\beta(x)\big)\frac{d\beta}{dx} - G\big(x,\alpha(x)\big)\frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\delta G}{\delta x}dt$$

حيث أن:

$G(x,t)$ و$\frac{\partial G}{\partial x}$ دوال متصلة في المنطقة المستطيلة $a \le x \le b$ و$t_0 \le t \le t_1$ وحدود التكامل $\alpha(x)$ و$\beta(x)$ هي دوال لها مشتقاتها المتصلة داخل الفترة$a < x < b$.

طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية لحل معادلة فولتيرا التكاملية:

طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية (Runge-Kutta 2nd Order) هي طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية العادية ويرمز لها بالرمز RK2. ولحل معادلة فولتيرا التكاملية باستخدام طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية، يتم تحويل المعادلة التكاملية إلى معادلة تفاضلية مكافئة. ثم نطبق طريقة رونج كوتا على المعادلة التفاضلية الناتجة للحصول على الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية.

طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة لحل معادلة فولتيرا التكاملية:

تعد طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة (Runge-Kutta 4th Order) إحدى أشهر طرق التحليل العددي لحل المعادلات التفاضلية العادية ويرمز لها بالرمز RK4 يمكن استخدام هذه الطريقة لحل معادلة فولتيرا التكاملية من خلال تحويلها إلى معادلة تفاضلية مكافئة، ثم تطبق خطوات الحل العددي.

مثـــــال (1):

باستخدام طرق رونج – كوتا أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية الآتية:

$$u(x) = 1 + xe^x - \int_0^x tu(t)dt$$

الحـــــل:

بتحويل المعادلة التكاملية إلى مسألة قيمة ابتدائية مكافئة عن طريق اشتقاق طرفي المعادلة التكاملية بالنسبة إلى x:

$$\frac{d}{dx}u(x) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}xe^x - \frac{d}{dx}\int_0^x tu(u)dt$$

وبتطبيق قاعدة ليبنيز نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية:

$$u'(x) = xe^x + e^x - xu(x)$$

للحصول على الشروط الابتدائية نضع $x = 0$ في المعادلة $u(x)$:

$$u(0) = 1 + (0)e^0 - \int_0^0 tu(t)dt = 1$$

وتكون مسألة القيمة الابتدائية المكافئة كالآتي:

$$u'(x) = xe^x + e^x - xu(x), \qquad u(0) = 1$$

بتطبيق طرق رونج – كوتا حيث أن:

$$0 \le x \le 1 \quad , \quad h = 0.1$$

وبتطبيق البرنامج (1)يمكن الحصول على النتائج العددية من الجدول (1):

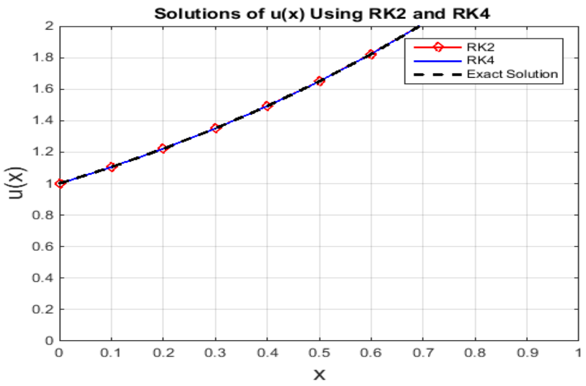
جدول (1): المقارنة بين طريقتي رونج –كوتا للمثال 1

x	e_rk2	e_rk4
0.000000	0.0000000000	0.0000000000
0.100000	0.0001134824	0.0000000466
0.200000	0.0002657827	0.0000001125
0.300000	0.0004609834	0.0000002023
0.400000	0.0007030109	0.0000003219
0.500000	0.0009956564	0.0000004788
0.600000	0.0013426247	0.0000006829
0.700000	0.0017476129	0.0000009466
0.800000	0.0022144140	0.0000012853
0.900000	0.0027470441	0.0000017184

```
clear;
n=10; h=1/n;
x_end=1; x0=0; u0=1;
%f=@(x,u)(-u);
f=@(x,u)(x*exp(x)+exp(x)-x*u);
%RK2 and RK4
x=x0:h:x_end;
u_rk2(1)=u0;
u_rk4(1)=u0;
%u_Ex=exp(-x);
u_Ex=exp(x);
%solution with RK2
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk2(i));
    k2=f(x(i)+h,u_rk2(i)+h*k1);
    u_rk2(i+1)=u_rk2(i)+(h/2)*(k1+k2);
end
%solution with RK4
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk4(i));
    k2=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k1);
    k3=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k2);
    k4=f(x(i)+h,u_rk4(i)+h*k3);
    u_rk4(i+1)=u_rk4(i)+(h/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);
end
%Error Solution
e_rk2=abs(u_rk2-u_Ex); e_rk4=abs(u_rk4-u_Ex);
%plotting the results
plot(x,u_rk2,'rd-','linewidth',1.5); hold on
plot(x,u_rk4,'b-','linewidth',1.5); hold on
plot(x,u_Ex,'k--','linewidth',1.5); grid
for i=1:n
    fprintf('%f\t%.10f\t%.10f\n',x(i),e_rk2(i),e_rk4(i))
```

```
end
ylabel('u(x)','fontsize',16)
xlabel('x','fontsize',16)
axis([0 1 0 2]);
legend('RK2','RK4','Exact Solution')
title('Solutions of u(x) Using RK2 and RK4','fontsize',12)
```

البرنامج (1)



شكل (1): التمثيل البياني لنتائج تطبيق طريقتي رونج-كوتا على مثال 1

مثـــــال (2):

أوجد حل المعادلة التكاملية الآتية باستخدام طرق رونج – كوتا:

$$u(x) = -x + tan(x) + tan^2(x) - \int_0^x u(t)dt$$

الحـــل:

بتحويل المعادلة التكاملية إلى مسألة قيمة ابتدائية عن طريق اشتقاق طرفي المعادلة التكاملية بالنسبة إلى x:

$$\frac{d}{dx}u(x) = -\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}tan(x) + \frac{d}{dx}tan^2(x) - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt$$

وبتطبيق قاعدة ليبنيز نحصل على المعادلة التكاملية الآتية:

$$u'(x) = -1 + sec^2(x) + 2tan(x)sec^2(x) - u(x)$$

للحصول على الشروط الابتدائية نضع $x = 0$ في المعادلة $u(x)$:

$$u(0) = -0 + tan(0) + tan^2(0) - \int_0^0 u(t)dt = 0$$

وتكون مسألة القيمة الابتدائية الناتجة كالآتي:

$$u'(x) = -1 + sec^2(x) + 2tan(x)sec^2(x) - u(x), \quad u(0) = 0$$

بتطبيق طرق رونج – كوتا حيث أن:

$$0 \le x \le 1 \qquad h = 0.1$$

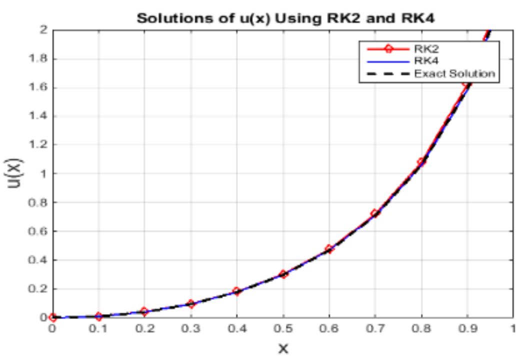
نحصل على النتائج العددية في الجدول (2) بتطبيق البرنامج.

جدول (2): المقارنة بين طريقتي رونج –كوتا للمثال 2

x	e_rk2	e_rk4
0.000000	0.0000000000	0.0000000000
0.100000	0.0005707805	0.0000005527
0.200000	0.0012684536	0.0000012784
0.300000	0.0021674715	0.0000023075
0.400000	0.0033908220	0.0000038775
0.500000	0.0051486870	0.0000064465
0.600000	0.0078178804	0.0000109578
0.700000	0.0121147422	0.0000195095
0.800000	0.0195013181	0.0000372230
0.900000	0.0332358673	0.0000781183

```
clear;
n=10; h=1/n;
x_end=1; x0=0; %u0=1;
u0=0;
%f=@(x,u)(-u);
%f=@(x,u)(x*exp(x)+exp(x)-x*u);
%f=@(x,u)(-sin(x)+cos(x)-u);
f=@(x,u)(-1+(sec(x))^2+2*tan(x)*(sec(x))^2-u);
%RK2 and RK4
x=x0:h:x_end;
u_rk2(1)=u0;
u_rk4(1)=u0;
%u_Ex=exp(-x);
%u_Ex=exp(x);
%u_Ex=cos(x);
u_Ex=(tan(x)).^2 ;
%solution with RK2
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk2(i));
    k2=f(x(i)+h,u_rk2(i)+h*k1);
    u_rk2(i+1)=u_rk2(i)+(h/2)*(k1+k2);
end
%solution with RK4
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk4(i));
    k2=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k1);
    k3=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k2);
    k4=f(x(i)+h,u_rk4(i)+h*k3);
    u_rk4(i+1)=u_rk4(i)+(h/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);
end
%Error Solution
e_rk2=abs(u_rk2-u_Ex); e_rk4=abs(u_rk4-u_Ex);
%plotting the results
plot(x,u_rk2,'rd-','linewidth',1.5); hold on
plot(x,u_rk4,'b-','linewidth',1.5); hold on
plot(x,u_Ex,'k--','linewidth',1.5); grid
for i=1:n
    fprintf('%f\t%.10f\t%.10f\n',x(i),e_rk2(i),e_rk4(i))
end
ylabel('u(x)','fontsize',16)
xlabel('x','fontsize',16)
axis([0 1 0 2]);
legend('RK2','RK4','Exact Solution')
title('Solutions of u(x) Using RK2 and RK4','fontsize',12)
```

البرنامج (2)



شكل (2): التمثيل البياني لنتائج تطبيق طريقتي رونج-كوتا على مثال 2

نلاحظ من الأمثلة السابقة عندما تم تحويل المعادلات التكاملية إلى معادلات تفاضلية مكافئة نتج عن ذلك معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى، وتم حلها بسهولة باستخدام طرق رونج – كوتا، أما إذا كانت المعادلات التفاضلية الناتجة من الرتبة الثانية سنقوم بتحويلها إلى معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى (أنظمة معادلات من الرتبة الأولى) حتى يسهل حلها باستخدام طرق رونج – كوتا.

معادلات من الدرجة الثانية (أنظمة المعادلات):

لتطبيق إحدى الطرق السابقة على معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية فإننا نحتاج إلى تحويل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية إلى أنظمة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y'' = g(x, y, y') \qquad y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_0'$$

فإنه يمكن تحويلها إلى نظام المعادلات من الدرجة الأولى باستخدام الفرضية الآتية وتكون المعادلتين المكافئتين كالآتي:

$$y' = v \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$
$$v' = g(x, y, v) \qquad\qquad v(x_0) = y_0'$$

والتي يتم فيها استبدال y' بـ v فتصبح $f(x, y, v)$ في الطرف الأيمن من المعادلة الأولى.

وبناءً عليه تعرف طريقة رونج كوتا من الرتبة الثانية كالآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(m_1 + m_2)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$
$$m_1 = g(x_n, y_n)$$
$$m_2 = g(x_n + h, y_n + hk_1)$$

وكذلك يمكن تعريف طريقة رونج – كوتا من الرتبة الرابعة كالآتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(m_1 + 2m_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$m_1 = g(x_n, y_n)$$
$$m_2 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$m_3 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$m_4 = g(x_n + h, y_n + hk_3)$$

وبذلك نحصل على الحل للنظام السابق والذي يكون عبارة عن v_{n+1}, y_{n+1}

والمثال التالي يوضح ما سبق:

مثـــال (3):

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية باستخدام طرق رونج – كوتا

$$u(x) = 1 - x^2 - \int_0^x (x - t)u(t)dt$$

الحـــل

بتحويل المعادلة التكاملية إلى مسألة قيمة ابتدائية عن طريق اشتقاق طرفي المعادلة التكاملية بالنسبة إلى x:

$$\frac{d}{dx}u(x) = \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}\int_0^x (x - t)u(t)dt$$

وبتطبيق قاعدة ليبنيز نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية:

$$u'(x) = -2x - \int_0^x u(t)dt$$

وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى x للتخلص من علامة التكامل:

$$\frac{d}{dx}u'(x) = -\frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt$$

بتطبيق قاعدة ليبنيز نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية:

$$u''(x) = -2 - u(x)$$

يمكن الحصول على الشروط الابتدائية بوضع $x = 0$ في المعادلتين $u'(x), u(x)$:

$$u(0) = 1 - 0^2 - \int_0^0 (0 - t)u(t)dt = 1$$

$$u'(0) = -2(0) - \int_0^0 u(t)dt = 0$$

وتكون مسألة القيمة الابتدائية المكافئة كالآتي:

$$u''(x) = -2 - u(x), \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

نلاحظ أن المعادلة الناتجة من الرتبة الثانية لذا من المناسب استبدال هذه المعادلة بأنظمة مكافئة من المعادلات من الرتبة الأول.

تكون المعادلتين المكافئتين كالتالي:

$$u'(x) = v, \qquad u(0) = 1$$
$$v' = -2 - u(x), \qquad v(0) = 0$$

بتطبيق طرق رونج – كوتا بحيث أن:

$$0 \le x \le 1, \qquad h = 0.1$$

نحصل على نتائج الجدول (3) باستخدام البرنامج (3):

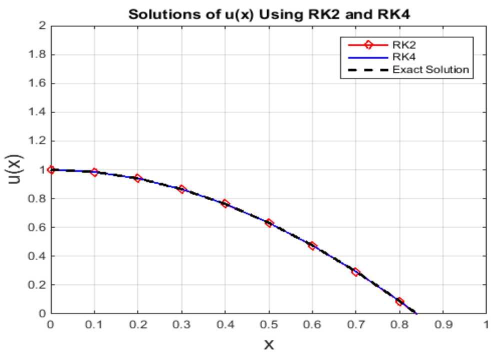
جدول (3): المقارنة بين طريقتي رونج –كوتا للمثال 3

x	e_rk2	e_rk4
0.000000	0.0000000000	0.0000000000
0.100000	0.0000124958	0.0000000042
0.200000	0.0001247335	0.0000000582
0.300000	0.0003348424	0.0000001612
0.400000	0.0006389801	0.0000003114
0.500000	0.0010313888	0.0000005058
0.600000	0.0015044794	0.0000007409
0.700000	0.0020489447	0.0000010120
0.800000	0.0026538978	0.0000013136
0.900000	0.0033070356	0.0000016398

```
clear;
n=10; h=1/n;
x_end=1; x0=0;
u0=1; v0=0;
f=@(x,u,v)(v);
g=@(x,u,v)(-2-u);
%RK2 and RK4
x=x0:h:x_end;
u_rk2(1)=u0; v_rk2(1)=v0;
u_rk4(1)=u0; v_rk4(1)=v0;
u_Ex=3.*cos(x)-2;
%solution with RK2
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk2(i),v_rk2(i));
    m1=g(x(i),u_rk2(i),v_rk2(i));
```

```
    k2=f(x(i)+h,u_rk2(i)+h*k1,v_rk2(i)+h*m1);
    m2=g(x(i)+h,u_rk2(i)+h*k1,v_rk2(i)+h*m1);
    u_rk2(i+1)=u_rk2(i)+(h/2)*(k1+k2);
    v_rk2(i+1)=v_rk2(i)+(h/2)*(m1+m2);
end
%solution with RK4
for i=1:n
    k1=f(x(i),u_rk4(i),v_rk4(i));
    m1=g(x(i),u_rk4(i),v_rk4(i));
    k2=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k1,v_rk4(i)+0.5*h*m1);
    m2=g(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k1,v_rk4(i)+0.5*h*m1);
    k3=f(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k2,v_rk4(i)+0.5*h*m2);
    m3=g(x(i)+0.5*h,u_rk4(i)+0.5*h*k2,v_rk4(i)+0.5*h*m2);
    k4=f(x(i)+h,u_rk4(i)+h*k3,v_rk4(i)+h*m3);
    m4=g(x(i)+h,u_rk4(i)+h*k3,v_rk4(i)+h*m3);
    u_rk4(i+1)=u_rk4(i)+(h/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);
    v_rk4(i+1)=v_rk4(i)+(h/6)*(m1+2*(m2+m3)+m4);
end
%Error Solution
e_rk2=abs(u_rk2-u_Ex); e_rk4=abs(u_rk4-u_Ex);
%plotting the results
plot(x,u_rk2,'rd-','linewidth',1.5); hold on;
plot(x,u_rk4,'b-','linewidth',1.5); hold on;
plot(x,u_Ex,'k--','linewidth',1.5); grid
for i=1:n
    fprintf('%f\t%.10f\t.10f\n',x(i),e_rk2(i),e_rk4(i))
end
ylabel('u(x)','fontsize',16)
xlabel('x','fontsize',16)
axis([0 1 0 2]);
legend('RK2','RK4','Exact Solution')
title('Solution of u(x) Using RK2 and RK4 ','fontsize',12)
```

برنامج (3)



شكل (3): التمثيل البياني لنتائج تطبيق طريقتي رونج-كوتا على مثال 3

نلاحظ أن:

(RK4) أكثر دقة وفاعلية لحل معادلة فولتيرا التكاملية كما موضح في الجدول والرسم البيانية السابقيين.

تحليل النتائج:

بعد تطبيق طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثانية (RK2) والرابعة (RK4) باستخدام برنامج الماتلاب على معادلة فولتيرا التكاملية في الأمثلة السابقة أظهرت النتائج أن:

- طريقة (RK4) أكثر دقة مقارنة بطريقة (RK2)، فعند مقارنة النتائج العددية بالحل المضبوط من الجدول لوحظ أن مقدار الخطأ في طريقة (RK4) كان أقل بكثير من طريقة (RK2). ومن خلال الرسم البياني تمت ملاحظة أن المنحنى الناتج عن طريقة (RK4) قريب جداً من منحى الحل المضبوط، بينما يظهر منحى طريقة (RK2) انحرافات ملحوظة.
- وبناء على التحليل أعلاه، يوصى باستخدام (RK4) في حل المعادلات للحصول على دقة عالية ونتائج عددية دقيقة.

المراجع:

1. ريتشارلد ل. بوردين، ج. دوغلاس فايرس. (2010) التحليل العددي. الرياض: مكتبة العبيكان.
2. سمية رجب محمد رفيدة. (2007). *خوارزميات رونج – كوتا وتطبيقاتها*. رسالة ماجستير، جامعة 7 أكتوبر، مصراته.
3. زينب علي الشقماني، سمية رجب رفيدة، الطرق العددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية، المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الثاني ـ العدد السادس، ديسمبر 2016.
4. زينب علي الشقماني، سمية رجب رفيدة، اشتقاق خوارزميات رونج كوتا، الندوة الثالثة حول نظريات وتطبيقات العلوم الاساسية والحيوية سبتمبر 2016.
5. A. M. Wazwaz, (2015). A First Course Integral Equation, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
6. A. M. Wazwaz, (2011). Linear and Nonlinear Integral Equations : Methods and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
7. F. B. Hildebrand, (1974). Introduction to Numerical Analysis. New York : Dover Publications.
8. R. S. Esfandiari, (2017). Numerical Methods for Engineers and Scientidts Using MATLAB. Boca Raton, FT: CRC Press.
9. Mathews, H. J.; Kurtis, D. F.; Numerical Methods Using Mathlab, 4th Edition Prenctice, Hall Inc, 2004.
10. Phailaung Phohomsiri, Firdase E.Udwadia, Acceleration of Runge-Kutta integration schemes, November 24, 2005.